Montrer qu'une application est linéaire

Quand on ne sait pas !

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$.
On dit que l'application f est $\mathbb{K}$-linéaire si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(u, v) \in E \times E$, on a :

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications $\mathbb{K}$-linéaires de E dans $\mathbb{K}$.

Que faire !

Montrer que f est $\mathbb{K}$-linéaire équivaut à montrer que l'on a :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2; \; f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Cela équivaut à montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(u, v) \in E^2$, on a :

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

Conseils

Noter que, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$. Par contraposée, si $g : E \to F$ est telle que $g(\overrightarrow{0}_E) \neq \overrightarrow{0}_F$, alors g n'est pas linéaire

Exemple traité

Montrer que la conjugaison est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$. Est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?

Exercices

EXERCICE 97.1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (2x - y, x + y - z)$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

EXERCICE 97.2 Soit f l'application définie par $f(P) = P(X + 1) - P(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_2[X])$.

EXERCICE 97.3 Dire si les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires.

1. $f_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie, par $f_1(P) = XP'(X) + P(1)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $f_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(P) = P(0)P'(1)$.
3. $f_3 : M_{2,3}(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ définie par $f_3(M) = AM$, où A est une matrice fixée de $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
4. $\phi_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_1(f) = f(5)$.
5. $\phi_2 : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_2(f) = \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)dt$.
6. $\phi_3 : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par $\phi_3(f) = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Déterminer la matrice d'une application linéaire

98

Quand on ne sait pas !

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

Pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, comme $f(e_j) \in F$, notons $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de $f(e_j)$ sur la base $\mathcal{B}_F$, c'est-à-dire : $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$.

Alors, on appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E$ au départ et $\mathcal{B}_F$ à l'arrivée la matrice à p lignes et n colonnes de coefficients $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$. On la note $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f)$.

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f)$ caractérise l'application linéaire f, car connaître une application linéaire de E dans F équivaut à la connaître sur une base de E.
Ainsi, pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, on a :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f) = Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(g) \Leftrightarrow f = g$$

Si $E = F$ et si on choisit la même base de E au départ et à l'arrivée, alors $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_E}(f)$ est notée $Mat_{\mathcal{B}_E}(f)$.
On remarque que, quelle que soit la base $\mathcal{B}_E$ choisie pour E, on a $Mat_{\mathcal{B}_E}(Id_E) = I_n$.

La représentation matricielle a les propriétés fondamentales suivantes :

- Pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f + \lambda g) = Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f) + \lambda Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(g)$$

  Autrement dit, la représentation matricielle est **linéaire**.
- Soit $x \in E$, soit X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_E$. Alors le produit $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f)X$ est le vecteur colonne des coordonnées de $f(x)$ sur la base $\mathcal{B}_F$.

Représentation matricielle et composition d'applications linéaires :

- Si $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases des espaces E, F et G respectivement, et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors on a :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_G}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_G}(g) Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f)$$

- En particulier si f est un endomorphisme de E et si $r \in \mathbb{N}$, alors on a : $Mat_{\mathcal{B}}(f^r) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^r$, où f^r désigne $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{r fois}}$.

- L'application f est un isomorphisme si et seulement si f a une matrice représentative inversible, et dans ce cas :

$$Mat_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f))^{-1}$$

Représentation matricielle et changement de bases :

- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on appelle matrice de changement de bases de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$, la matrice $Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id_E)$.

- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F respectivement, alors on a :

$$Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}'}$$

- Soit $x \in E$, si X (resp. X') est le vecteur des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$), alors on a : $X = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} X'$

Que faire !

- Pour déterminer $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f)$, on décompose, pour chaque vecteur e_j de $\mathcal{B}_E$, le vecteur $f(e_j)$ sur $\mathcal{B}_F$. On place alors les coordonnées de $f(e_j)$ sur $\mathcal{B}_F$ dans la j-ième colonne de $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f)$
- Pour déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, on exprime chaque vecteur e'_j de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sur l'ancienne base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$: on place alors les coordonnées de e'_j sur $\mathcal{B}$ dans la j-ième colonne de $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

- S'il est plus facile de calculer $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$, on peut utiliser le fait que $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}})^{-1}$.

Conseils

- Pour visualiser chaque colonne C_j de $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f)$ comme constituée des coordonnées de $f(e_j)$ sur $\mathcal{B}_F$, on peut écrire :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & & & f(e_j) & f(e_n) \\ \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow f_i \\ \vdots \\ \leftarrow f_p \end{array}$$

- Pour visualiser chaque colonne C_j de $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ comme constituée des coordonnées de e'_j sur $\mathcal{B}$, on peut écrire :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e'_1 & & & e'_j & e'_n \\ \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ p_{i,1} & \cdots & \cdots & p_{i,j} & \cdots & p_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array}$$

Exemple traité

Soit $\mathcal{B}_E = (1, X, X^2)$, la base canonique de $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\mathcal{B}_F = (1, X)$, la base canonique de $F = \mathbb{R}_1[X]$. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ l'application linéaire telle que $Mat_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de f sur $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 98.1 Soit $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme de transposition, c'est-à-dire

l'application définie par : $\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ f(M) = {}^tM$.
Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
Calculer A^2. Quelle propriété de la transposition retrouve-t-on ?

EXERCICE 98.2 Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_2[X])$ et calculer $f(P)$ pour $P = 1$, puis $P = X$, $P = X^2$ et $P = X^3$.
2. En déduire $A = Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Utiliser la matrice A pour déterminer $f(R)$ où $R = X^3 - 2X^2 + X - 1$.
4. Déterminer la matrice A' de f pour la base $\mathcal{B}' = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ au départ et $\mathcal{C}' = (1, (X+1), (X+1)^2)$ à l'arrivée.

Déterminer le noyau d'une application linéaire

99

Quand on ne sait pas !

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle noyau de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est $\overrightarrow{0}_F$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E,\ f(v) = \overrightarrow{0}_F\}$$

Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
On rappelle qu'une application $f : E \to F$ est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E. Si f est linéaire, alors on a la caractérisation suivante :

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$$

Une *forme linéaire sur* E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
On appelle *hyperplan de* E tout noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Que faire !

Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, c'est résoudre l'équation : $f(v) = \overrightarrow{0}_F$, d'inconnue v dans E.
Cela revient souvent à résoudre un système linéaire.
On donnera alors le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$ de E comme un sous-espace engendré.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, et soit S le système : $AX = \overrightarrow{0}_{M_{p,1}(\mathbb{K})}$, d'inconnue X dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
L'ensemble des solutions de ce système est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé *noyau de* A, et noté $\mathrm{Ker}(A)$.
Si A est la matrice représentative de f pour une une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E au départ, alors on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$$

Conseils

Revoir la méthode du pivot.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = MA$.
Vérifier que $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ et déterminer une base de son noyau. L'endomorphisme f est-il injectif ?

Exercices

EXERCICE 99.1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer son noyau.

EXERCICE 99.2 Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Déterminer une base du noyau de f.

EXERCICE 99.3 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P'(1)$, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que le noyau de f est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.

100

Déterminer l'image et le rang d'une application linéaire

Quand on ne sait pas !

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. On appelle image de l'application linéaire f, et on note $\operatorname{Im}(f)$, l'ensemble des images par f des vecteurs de E. Autrement dit

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{f(v),\, v \in E\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.
On rappelle qu'une application $f : E \to F$ est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E, autremnent dit si $f(E) = F$. Si f est linéaire, elle est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

On appelle rang de l'application linéaire f, et on note $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de l'image de f, c'est-à-dire

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Si E et F sont de dimension finie, alors $\operatorname{rg}(f) \leq Min\{\dim(E), \dim(F)\}$.
L'application f est alors injective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$, et elle est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$.

Rappelons enfin que le théorème du rang permet de relier la dimension du noyau au rang de f, si E est de dimension finie (cf. fiche 101).

Que faire !

Si $(v_1, \ldots, v_m)$ est une famille génératrice de E, alors par linéarité de f,

$$f(E) = f(\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_m)) = \operatorname{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_m))$$

Ainsi, $(f(v_1), \ldots, f(v_m))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$.
Il suffit donc d'obtenir une base de $\operatorname{Im}(f)$ à partir de cette famille génératrice, pour en déduire la dimension de $\operatorname{Im}(f)$, c'est-à-dire le rang de f.
Enfin, si E et F sont de dimension finie, et si A est une matrice représentative de f, alors

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A)$$

On peut donc se ramener au calcul du rang d'une matrice (cf. fiche 103).

Conseils

Connaître des bases des espaces vectoriels classiques :

- la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, où e_i est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1 ;
- la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, où $E_{i,j}$ est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i^e ligne, j^e colonne, qui vaut 1 ;
- la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$;
- la base canonique $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$.

Revoir aussi comment on extrait une base d'une famille génératrice finie (cf. fiche 86).

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} M_{2,3}(\mathbb{R}) & \to & M_{2,3}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.

Déterminer l'image et le rang de f.

EXERCICE 100.1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer son image et son rang. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

EXERCICE 100.2 Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$.
Déterminer l'image de f. Qu'en déduire ?

EXERCICE 100.3 Soit $f : M_2(\mathbb{R}) : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tA + A$.
Déterminer l'image et le rang de f.

Utiliser le théorème du rang

101

Quand on ne sait pas !

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

> Le théorème du rang assure que, si E est de dimension finie, alors
> $$\operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(E)$$

Que faire !

Vérifier que f est linéaire et que son espace de départ E est de dimension finie, pour pouvoir appliquer le théorème du rang.
Si la dimension de E est connue, le rang de f peut donc se déduire de la dimension de son noyau, et réciproquement.

Conseils

Attention, l'égalité $\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f))$ ne signifie pas que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E, même si $E = F$.

Exemple traité

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer son rang. Qu'en déduire ?

Exercices

EXERCICE 101.1 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = XP'(X) + P(0)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

EXERCICE 101.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$, que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, puis que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Montrer qu'une application linéaire est bijective

102

Quand on ne sait pas !

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$.
On dit que f est un isomorphisme si f est linéaire et bijective.
On rappelle qu'une application $f : E \to F$ est bijective si elle est injective et surjective, autrement dit si tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E.

Que faire !

- Chacune des deux phrases suivantes équivaut à la bijectivité de l'application linéaire f :
  - $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.
  - Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit base de F.
- Si f est un isomorphisme de E dans F, alors E et F ont une même dimension.
- Si E et F ont une même dimension finie, alors

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Conseils

Connaître la dimension et une base des espaces vectoriels classiques pour pouvoir utiliser les caractérisations précédentes.
Si E et F sont de dimension finie, et si A est une matrice représentative de f, alors f est bijective si et seulement si A est inversible.

Exemple traité

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$, l'application définie par $f(P) = \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P(1) & P'(1) \end{pmatrix}$,
pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercices

EXERCICE 102.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, une liste de complexes deux à deux distincts. Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.

EXERCICE 102.2 Les applications linéaires suivantes sont-elles bijectives ?

1 $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y, x + z) \end{array} \right.$

2 $f_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y, x + z, x + y + z) \end{array} \right.$

3 $f_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1), P''(1)) \end{array} \right.$

EXERCICE 102.3 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, définie par $f(P) = (P(0), P'(1), P''(2))$, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

Trouver le rang d'une matrice

103

Quand on ne sait pas !

Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, on note $C_1, \ldots, C_n$ ses vecteurs colonnes.

On appelle rang de la matrice A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n))$$

Que faire !

Le rang de A est donc le rang de la famille constituée de ses vecteurs colonnes.
Comme le rang est invariant par transposition, le rang de A est aussi le rang de la famille constituée de ses vecteurs lignes, et on a :

$$\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{Min}\{n, p\}$$

Deux matrices équivalentes ont le même rang.
Or, si on effectue des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A, on obtient une matrice équivalente à A, donc de même rang que A.

Comme le rang d'une matrice échelonnée est évident, on peut donc échelonner la matrice A par des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes pour déterminer son rang.

Conseils

Revoir les méthodes de la fiche 87, pour savoir déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
Revoir la méthode du pivot, pour savoir se ramener à une matrice équivalente échelonnée.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A.

Exercices

EXERCICE 103.1 Déterminer le rang de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 103.2 Déterminer le rang de $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Caractériser un projecteur

104

Quand on ne sait pas !

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application $p : E \to E$ qui à tout vecteur u de E associe la composante de u sur F, dans sa décomposition sur $F \oplus G$.

> Autrement dit, si $(v, w) \in F \times G$ vérifie $u = v + w$, alors $p(u) = v$.

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors p est un endomorphisme de E, et on a $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
En particulier : $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

Que faire !

Caractériser un projecteur p, c'est déterminer les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

Pour vérifier qu'un endomorphisme f est un projecteur, on utilise cette caractérisation :

> Si $f \in \mathcal{L}_K(E)$, alors f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$ (où f^2 désigne $f \circ f$).

Plus précisément, si l'endomorphisme f vérifie $f^2 = f$, alors on a :

- $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f)$;
- $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E ;
- f est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Conseils

- Si A est une matrice représentative de l'endomorphisme f **pour une même base au départ et à l'arrivée** , alors $f^2 = f$ si et seulement si $A^2 = A$, donc f est un projecteur si et seulement si $A^2 = A$.
- Revoir les méthodes pour déterminer le noyau d'une application linéaire, afin de déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ quand f est un projecteur.

Exemple traité

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, l'application définie par $f(M) = \frac{1}{2}(M +^t M)$.
Montrer que f est un projecteur et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Que peut-on en déduire ?

Exercices

EXERCICE 104.1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que f est un projecteur et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

EXERCICE 104.2 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0\}$.
Vérifier que F et G sont supplémentaires dans E et déterminer le projecteur p sur F, parallèlement à G.

Caractériser une symétrie

Quand on ne sait pas !

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
On appelle symétrie par rapport à F, parallèlement à G, l'application $s : E \to E$ qui à tout vecteur u de E associe $v-w$, où v et w sont les composantes de u sur F et G respectivement.

> Autrement dit, si $(v, w) \in F \times G$ vérifie $u = v + w$, alors $s(u) = v - w$.

Si s est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G, alors s est un endomorphisme de E, et on a $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
En particulier : $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = E$.

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, et s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G, alors on a la relation :

$$s = 2p - Id_E$$

Que faire !

Caractériser une symétrie s, c'est déterminer $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
Pour vérifier qu'un endomorphisme f est une symétrie, on utilise cette caractérisation :

> Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est une symétrie si et seulement si $f^2 = \mathrm{Id}_E$ (où $f^2 = f \circ f$).

Plus précisemment, si l'endomorphisme f vérifie $f^2 = \mathrm{Id}_E$, alors on a :

- $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E ;
- f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Conseils

Si A est une matrice représentative de l'endomorphisme f **pour une même base au départ et à l'arrivée** , alors $f^2 = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $A^2 = I_n$, donc f est une symétrie si et seulement si $A^2 = I_n$.

Exemple traité

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ f(M) = {}^tM$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})})$.
Qu'en déduire ?

Exercices

EXERCICE 105.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomoprhisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Montrer que f est une symétrie et déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

EXERCICE 105.2 Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P(X)) = P(-X)$$

Montrer que f est une symétrie et la caractériser. Qu'en déduire ?

EXERCICE 105.3 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1,1,1))$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$. Vérifier que F et G sont supplémentaires dans E et déterminer la symétrie s par rapport à F et parallèlement à G.